

La ecuación de Laplace – coordenadas cilíndricas.

En coordenadas cilíndricas el operador Laplaciano está dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad 1$$

La ecuación de Laplace es, como consecuencia,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2} = 0 \quad 2$$

donde $\varphi_e = \varphi_e(r, \psi, z)$. La solución de la ecuación (2) es una función de φ_e que se puede escribir como

$$\varphi_e(r, \psi, z) = R(r) \Psi(\psi) Z(z) \quad 3$$

Una vez más, cada una de las tres funciones R, Ψ, Z sólo depende de la variable respectiva apropiada y de constantes de separación. Al sustituir la ecuación (3) en (2), el resultado es

$$\frac{\Psi Z}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} R Z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} + R \Psi \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad 4$$

Al dividir cada término por el producto $R \Psi Z$ y transponiendo el término en Z , se tiene

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} = - \frac{1}{z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \quad 5$$

Como la mano derecha es una función sólo z , las variables están separadas. De la condición que R, Ψ y Z son independientes una de la otra, entonces existe una constante k^2 tal que

$$- \frac{1}{z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \quad 6$$

Si cada término de la ecuación (5), con la mano derecha reemplazado por $-k^2$, se multiplica por r^2 y al arreglar de nuevo, el resultado es

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 = - \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} \quad 7$$

Una vez más las variables están separadas y cada lado debe igual a una constante, digamos n^2 . Así, se tiene tres ecuaciones diferenciales totales:

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + n^2\Psi = 0 \quad 8$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0 \quad 9$$

y

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0 \quad 10$$

El producto de las soluciones de estas tres ecuaciones será la función $\varphi_e(r, \psi, z)$ según la ecuación (3). El estudio de la electrostática en coordenadas cilíndricas en una región libre de carga es equivalente al estudio de las ecuaciones (8), (9) y (10).

Unas ecuaciones tales como (8) y (9) ya se han encontrado. Sus soluciones son

$$\Psi(\psi) = A \sin n\psi + B \cos n\psi \quad 11$$

$$Z(z) = C \sinh kz + D \cosh kz \quad 12$$

Un requerimiento se plantea ahora sobre la función $\Psi(\psi)$, y es que sea de un solo valor. Tal restricción es necesaria para que la función de potencial $\varphi_e(r, \psi, z)$ sea de un solo valor. Sigue de este requerimiento antes mencionado, que n debe ser un entero, ya que cuando ψ aumenta por 2π , la relación

$$\begin{aligned} \sin n\psi &= \sin[n(\psi + 2\pi)] \\ \cos n\psi &= \cos[n(\psi + 2\pi)] \end{aligned}$$

es válida sólo para n entero.

Se examina ahora la ecuación (10). Para n entero, la solución de la ecuación (10) está dada por la combinación lineal

$$R(r) = EJ_n(kr) + FN_n(kr) \quad 13$$

donde $J_n(kr)$ es la función de Bessel de orden n y argumento kr y $N_n(kr)$ es la función de Neumann de orden n y argumento kr .

Según la ecuación (3), la solución general de la ecuación (2) está dada por

$$\varphi_e(r, \psi, z) = R(r)\Psi(\psi)Z(z)$$

donde R está dada por la ecuación (13), Ψ por la ecuación (12) y Z por la ecuación (11). Al escribir la solución para $\varphi_e(r, \psi, z)$ y tomando una combinación lineal de soluciones, se tiene

$$\varphi_e(r, \psi, z) = \sum_{n,k} (A_n \sin n \psi + B_n \cos n \psi) (C_k \sinh kz + D_k \cosh kz) \\ (E_{n,k} J_n(kr) + F_{n,k} N_n(kr)) \quad 14$$

Ejemplos – La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

(a)-Potencial unidimensional: Dependencia radial.

Si $\varphi_e = \varphi_e(r)$ la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas se reduce a la ecuación diferencial total en r ,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_e}{dr} \right) = 0 \quad 15$$

Si la ecuación (15) es válida, entonces

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_e}{dr} \right) = 0 \quad 16$$

también es válida al integrar una vez y se obtiene

$$r \frac{d\varphi_e}{dr} = A \quad 17$$

donde A es una constante arbitraria. Otra integración produce

$$\varphi_e(r) = A \ln r + B \quad 18$$

Para evaluar las constantes arbitrarias A y B en la ecuación (18), dos condiciones de borde se necesitan. Se define φ_e , por ejemplo, en $r_0 \leq r \leq r_1$ y sea $\varphi_e(r_0) = V_0$ y $\varphi_e(r_1) = V_1$. Luego, las ecuaciones

$$V_0 = A \ln r_0 + B$$

siguen, con los valores de A y B dados por

$$A = \frac{(V_1 - V_0)}{\ln(r_1/r_0)} \quad 19$$

y

$$B = V_0 - \frac{(V_1 - V_0) \ln r_0}{\ln(r_1/r_0)} \quad 20$$

El potencial es

$$\varphi_e(r) = \frac{(V_1 - V_0)}{\ln(r_1/r_0)} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + V_0 \quad 21$$

(b)-Potencial bidimensional.

Sea φ_e la función $\varphi_e = \varphi_e(r, z)$, independiente del ángulo ψ . Entonces $n = 0$, y la solución formal en la ecuación (14) se vuelve

$$\varphi_e(r, z) = \sum_k [A_k J_0(kr) + B_k N_0(kr)] (C_k \sinh kz + D_k \cosh kz) \quad 22$$

Se define el potencial en la región $0 \leq r \leq r_0$ y en $-\infty \leq z \leq \infty$. Sean las condiciones de borde

$$\begin{aligned} \varphi_e(0, z) &\text{ es finito} \\ \varphi_e(r_0, z) &= 0 \\ \varphi_e(r, 0) &= f(r) \end{aligned} \quad 23$$

y sean los puntos $|z| = \infty$ definidos como el nivel de referencia de potencial cero. Considerando la última condición de borde dada, se puede ver que la combinación

$$C_k \sinh kz + D_k \cosh kz$$

se debe reducir a

$$e^{-k|z|}$$

para que, mientras $|z| \rightarrow \infty$, φ_e puede ser cero. Ahora se tiene

$$\varphi_e(r, z) = \sum_k e^{-k|z|} [A_k J_0(kr) + B_k N_0(kr)] \quad 24$$

Si $\varphi_e(0, z)$ será finito, entonces todos los $B_k \equiv 0$, ya que, mientras $r \rightarrow 0$, $N_0(kr) \rightarrow \infty$. Las dos condiciones restantes ahora determinan los coeficientes A_k y la constante k . Puesto que $\varphi_e(r_0, z) = 0$ para todo z , es necesario tener

$$J_0(kr_0) = 0 \quad 25$$

Finalmente, la condición que $\varphi_e(r, 0) = f(r)$ conduce a

$$f(r) = \sum_k A_k J_0(kr) \quad 26$$

La consecuencia de la ecuación (26) se entiende mejor al observar el gráfico de la función $J_0(kr)$ como función de la variable kr . Se puede ver que $J_0(kr)$ se va a cero en los puntos cuyos valores se muestran en la figura 3, (Las raíces de $J_0(kr)$.) El espaciamiento de los ceros se vuelve $kr=\pi$ para $r>8.65$ (por ejemplo, $11.79 - 8.65 = 3.14$). Ahora, la condición en la ecuación (25) es equivalente a decir que

$$kr_0 = \lambda_n$$

27

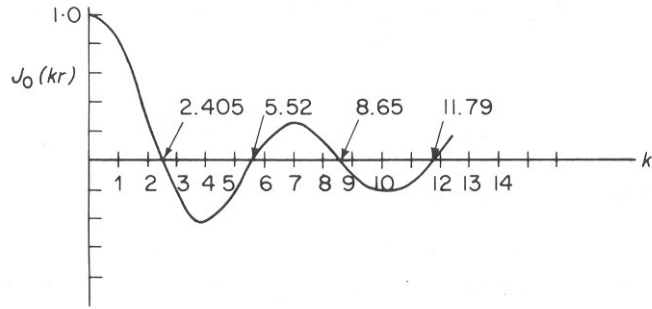


Figura 3.

La función $J_0(kr)$ como función de kr .

donde λ_n son las raíces de $J_0(kr)$.

$\lambda_0=2.405$, $\lambda_1=5.52$, $\lambda_3=8.65$ y $\lambda_k=8.65+(k-3)\pi$ para $k=4, 5, \dots, \infty$. Sólo queda la tarea de evaluar las constantes A_k , o ya que $k \propto \lambda_n$, las A_n . Por las ecuaciones (26) y (27), se obtiene

$$f(r) = \sum_n A_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{r_0}\right) \quad 28$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (28) por $(r/r_0)J_0(\lambda_j(r/r_0))$ e integrar sobre el rango de r , se obtiene

$$\int_0^{r_0} f(r) \left(\frac{r}{r_0}\right) J_0\left(\lambda_j \frac{r}{r_0}\right) dr = \sum_n A_n \int_0^{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right) J_0\left(\lambda_n \frac{r}{r_0}\right) J_0\left(\lambda_j \frac{r}{r_0}\right) dr \quad 29$$

Al poner $r/r_0=x$, la ecuación (29) se vuelve

$$\int_0^1 f(xr_0) x J_0(\lambda_j x) dx = \sum_n A_n \int_0^1 x J_0(\lambda_n x) J_0(\lambda_j x) dx \quad 30$$

En la ecuación (30), la mano derecha es cero a menos que $\lambda_n=\lambda_j$. Si $\lambda_n=\lambda_j$, entonces se tiene

$$\int_0^1 x J_0^2(\lambda_j x) dx = \frac{1}{2} [J'_n(\lambda_j)]^2$$

Como consecuencia,

$$A_j = \frac{2 \int_0^1 f(xr_0) x J_0(\lambda_j x) dx}{[J'_n(\lambda_j)]^2} \quad 31$$

Al sustituir la ecuación (31) y la relación $k = \lambda_n / r_0$ en la ecuación (24), la expresión para el potencial se vuelve

$$\varphi_e(r, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n |z| / r_0} J_0\left(\lambda_n \frac{r}{r_0}\right)}{[J'_0(\lambda_n)]^2} \int_0^1 f(xr_0) x J_0(\lambda_n x) dx \quad 32$$

Otro ejemplo en dos dimensiones:

Sea φ_e la función $\varphi_e = \varphi_e(r, \psi)$, independiente de z . Empezando desde los principios básicos, el operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas cuando $\varphi_e = \varphi_e(r, \psi)$ se vuelve

$$\nabla^2 \varphi_e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial \psi^2} = 0 \quad 33$$

Aquí r es la distancia desde el origen al punto en cuestión y ψ es el ángulo medido de forma antihoraria desde el eje x a r . Como los casos anteriores se expresa φ_e como el producto de dos funciones, cada una independiente de la otra.

$$\varphi_e = \varphi_e(r, \psi) = R(r) \Psi(\psi) \quad 34$$

Al sustituir esta expresión de $\varphi_e(r, \psi)$ en la ecuación (33), se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) \Psi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} R = 0 \quad 35$$

Al multiplicar por r^2 / Ψ , se tiene

$$\frac{1}{R} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} = 0 \quad 36$$

La mano izquierda consiste de dos términos, cada uno independiente del otro e involucrando una variable. Para poder satisfacer la ecuación (36) para todos los valores de r y ψ , los dos términos deben ser iguales a constantes del mismo magnitud pero de signos opuestos. La ecuación se reduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) = +n^2 \quad 37$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} = -n^2 \quad 38$$

con n^2 como la constante de separación vista antes. Las soluciones son triviales ($n = 0$) o no triviales ($n \neq 0$).

Soluciones triviales.

Las soluciones triviales resultan cuando $n = 0$. Las ecuaciones (37) y (38) se vuelven

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} = 0 \quad 39$$

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} = 0 \quad 40$$

La solución de las ecuaciones (39) y (40) son respectivamente

$$R(r) = (A + B \ln r) \quad 41$$

$$\Psi(\psi) = (C + D\psi) \quad 42$$

con A , B , C y D constantes arbitrarias. La solución trivial de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es

$$\varphi_e(r, \psi) = (A + B \ln r)(C + D\psi) \quad 43$$

Considere el caso interesante cuando $B=C=0$, y la solución se reduce a

$$\varphi_e = A' \psi \quad \text{con } A' = AD = \text{constante} \quad 44$$

Esta función particular es interesante porque no es de un valor único. Cambia en valor por $2\pi A'$ cada vez el punto de observación hace un a revolución completa antihoraria sobre el origen, para $\psi = \psi + 2\pi$. Los potenciales electrostáticos, sin embargo, deben ser de un valor único en todas las regiones. Esto sigue de la definición básica del incremento de potencial eléctrico como el trabajo realizado por unidad de carga en contra de la fuerza del campo eléctrico acoplado con el hecho que las leyes de campos

electrostáticos exigen que la integral de línea de \mathbf{E} debe ser igual a cero para todos los caminos cerrados. Así, el incremento neto del potencial eléctrico alrededor de cualquier lazo cerrado C , que empieza y termina sobre el mismo punto digamos P , debe reducirse a cero o sea,

$$\Delta \varphi_e = \varphi_e(P) - \varphi_e(P) = - \int_P^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad 45$$

Así $\varphi_e = A' \psi$ no puede representar un potencial eléctrico realizable físicamente en una región del espacio sobre la cual el ángulo ψ pueda incrementar por valores de 2π o más.

Sin embargo, nada impide usar la función $\varphi_e = A' \psi$ para representar potenciales electrostáticos en configuraciones geométricas que físicamente limitan los cambios en ψ a valores *menos de 2π en magnitud*. Por ejemplo, véase el problema mostrado en la figura 4 en el cual los campos de potencial φ_e y \mathbf{E} electrostáticos en una región libre de carga entre dos placas conductoras cargadas. Se puede demostrar que el potencial eléctrico está gobernado por

$$\varphi_e = \frac{V_0}{\Delta} \psi \quad \text{para} \quad \begin{matrix} r > 0 \\ 0 \leq \psi \leq \Delta \end{matrix} \quad 46$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = E \mathbf{1}_\psi = -\nabla \varphi_e(r, \psi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \psi} \mathbf{1}_\psi = \frac{-V_0}{r \Delta} \mathbf{1}_\psi \quad \text{para} \quad \begin{matrix} r > 0 \\ 0 \leq \psi \leq \Delta \end{matrix} \quad 47$$

V_0 es el voltaje en la placa superior con respecto a la placa inferior y $\mathbf{1}_\psi$ es el vector unitario en la dirección de ψ . Siempre y cuando el ángulo $\Delta < 2\pi$, el potencial obtenido es de un valor único.

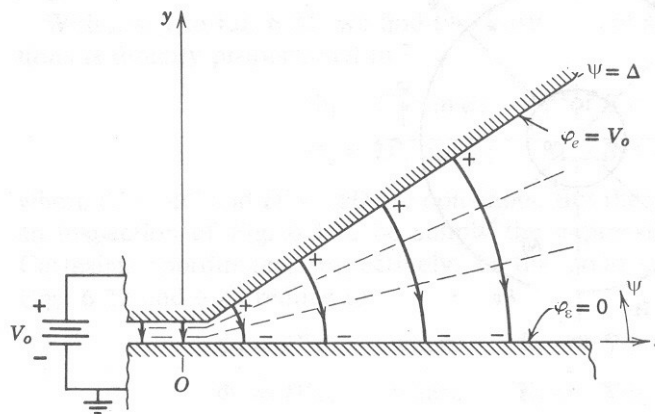


Figura 4.
El potencial y campo eléctrico entre dos placas inclinadas.